Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2020

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}-\{a\}\right\}.$

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $(G,\cdot)$ să fie grup, unde „·" este operaţia de înmulţire a matricelor.

b) Să se demonstreze că

$$\mathrm{A}(x_1)\cdot\mathrm{A}(x_2)\cdot\ldots\cdot\mathrm{A}(x_n)=A\left(\frac{1}{2}-2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-x_n\right)\right),\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,$$

$x_i\in\mathbb{R}-\{a\},\ i=\overline{1,n}$

Problema 2.

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu un număr impar de elemente. Să se demonstreze că funcţia $f:\ G\to G,\ f(x)=x^2,\ (\forall)\ x\in G,$ este bijectivă.

Problema 3.

Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii:

a) $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{7\sin x+4\cos x}{e^{2x}+2\sin x+3\cos x}.$

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^4+8x^2+4}.$

Problema 4.

Rezolvaţi ecuaţia $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)+3,$ unde f este o funcţie de două ori derivabilă care verifică: $f''(x)-7f'(x)+10\cdot f(x)=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R},\ f(0)=3,\ f'(0)=12.$

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7