Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2020

Clasa a X-a

Problema 1.

Fie $a, b, c \in (0,1)$. Să se arate că:

a) $\dfrac{4bc}{(a+b)\cdot(a+c)} \le \dfrac{\sqrt{bc}}{a}$.

b) $\log_a \dfrac{4bc}{(a+b)\cdot(a+c)} + \log_b \dfrac{4ac}{(a+b)\cdot(b+c)} + \log_c \dfrac{4ba}{(a+c)\cdot(b+c)} = 0$ dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Problema 2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\left(x^4-x^3-x+1\right)\cdot 5^{x^2-1}+\left(x^3-x^2-x+1\right)\cdot 5^{x^3-1}+\left(x^5-x^3-x^2+1\right)\cdot 5^{x-1}=x^5+x^4-x^3-2x^2-2x+3.$$

Problema 3.

Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{8-x}{x^3-2} = 2019^{3x^3+3x-30}$.

Problema 4.

Fie $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \in \mathbb{C}$, distincte două câte două, de modul 1, cu proprietatea:

$|S-z_1|^2+|S-z_2|^2+|S-z_3|^2+|S-z_4|^2=4$, unde $S = z_1+\ z_2+\ z_3+\ z_4$.

Să se demonstreze că:

a) $S=0$.

b) Imaginile geometrice ale numerelor complexe $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ sunt vârfurile unui dreptunghi.

c) Dacă $z \in \mathbb{C}$ şi $|z-z_k| \le 1,\ k \in \{1,2,3,4\}$, atunci $z = 0$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7