Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2020

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Se dau numerele reale $x,\ y,\ z\ >0,$ diferite de 3. Dacă $x+y+z=3,$ arătaţi că

F(x, y, z)= $\dfrac{x-\mathrm{y}}{xy\ +\ 3z}+\dfrac{y-z}{yz+3x}+\dfrac{z-x}{zx+3y}$ este constantă.

Problema 2.

a) Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x^2+4y^2+9z^2+20=4x+12y+24z,$

să se arate că $x\in[-1,5], y\in[0,3]$ şi $z\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3}\right].$

b) Să se determine numerele naturale x şi y pentru care $\left[\dfrac{x}{y}\right]=2, \left\{\dfrac{y}{x}\right\}=0,4$ şi $\left[\dfrac{x^2}{y}\right]=5050.$

Problema 3.

Fie ABCD un romb, AB=a, $a>0$ şi AC= $a\sqrt{3}$. Pe planul rombului se ridică perpendicularele AA′ şi BB′ de aceeaşi parte a planului, astfel încât AA′=AB şi BB′=$\dfrac{1}{2}$AB. Să se determine:

a) distanţa de la punctul A′ la dreapta BD;

b) distanţa de la punctul A la planul $(\mathrm{A'BD})$;

c) măsura unghiului dintre planele (ABC) şi $(\mathrm{A'B'D})$.

Problema 4.

a) Fie un cub cu latura de lungime 1. Să se demonstreze că oricum s-ar alege 65 de puncte distincte în interiorul cubului, există cel puţin două puncte cu proprietatea că distanţa dintre ele este cel mult egală cu $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

b) Fie ABCDA′B′C′D′ o prismă patrulateră regulată cu bazele ABCD şi A′B′C′D′, AC$\cap$BD=$\{$O$\}$ şi punctul E mijlocul muchiei $[CC']$. Să se arate că dacă EO $\perp$ OA′, atunci ABCDA′B′C′D′ este cub.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7