**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi**

**16 februarie 2020**

**Clasa a IX-a**

Problema 1.

Fie $a, b, c > 0$. Să se demonstreze că:

a) $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\geq 8\cdot a\cdot b\cdot c$

b) $a^3+b^3+c^3\geq 3\cdot a\cdot b\cdot c$

c) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

Problema 2.

a) Să se demonstreze că dacă $a, b\in\mathbb{R}$, cu $[a]=[b]$, atunci $|a-b|<1$.

b) Să se rezolve ecuaţia : $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\left[\frac{x+1}{3}\right]$.

Problema 3.

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1=\frac{1}{4}$ şi $\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}=\frac{2}{n^2+2\cdot n}$, $n\geq 1$.

Să se arate că $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot x_k<1, (\forall) n\geq 1$. (s – a notat $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot x_k=3\cdot x_1+5\cdot x_2+7\cdot x_3+...+(2\cdot n+1)\cdot x_n$).

Problema 4.

a) Fie punctele O, A, B, C, iar A, B, C distincte două câte două. Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OB}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{OC}$ .

b) Considerăm punctele A, B, C, A′, B′, C′ în acelaşi plan.Arătaţi că suma vectorilor $\overrightarrow{MN}$, cu $M\in\{A,B,C\}$ şi $N\in\{A', B', C'\}$, este nulă dacă şi numai dacă triunghiurile ABC şi A′ B′C′ au acelaşi centru de greutate.

**Notă:** Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7