Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2020

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	Soluţie: $x+y+z=3 \Rightarrow z=3-x-y \Rightarrow xy+3z = xy+3(3-x-y) = (y-3)(x-3)$ $x+y+z=3 \Rightarrow x=3-y-z \Rightarrow yz+3x = yz+3(3-y-z) = (z-3)(y-3)$ $x+y+z=3 \Rightarrow y=3-x-z \Rightarrow zx+3y = zx+3(3-x-z) = (x-3)(z-3)$	**3p**
	Înlocuim în expresia iniţială : $F(x,y,z)=\frac{x-y}{(y-3)(x-3)}+\frac{y-z}{(z-3)(y-3)}+\frac{z-x}{(x-3)(z-3)}$	**1p**
	Aducem la acelaşi numitor şi obţinem: $F(x,y,z)=\frac{(x-y)(z-3)+(x-3)(y-z)+(y-3)(z-x)}{(x-3)(y-3)(z-3)} \Leftrightarrow$	**1p**
	$F(x,y,x)=\frac{xz-3x-yz+3y+xy-xz-3y+3z+yz-yx-3z+3x}{(x-3)(y-3)(z-3)}=0=$ constantă.	**2p**

2.	*a*) $x^2+4y^2+9z^2+20=4x+12y+24z \Leftrightarrow$ $x^2-4x+4+4y^2-12y+9+9z^2-24z+16=9 \Leftrightarrow$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}(x-2)^2+(2y-3)^2+(3z-4)^2=9\\(x-2)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}\\(2y-3)^2\geq 0, \forall y\in\mathbb{R}\\(3z-4)^2\geq 0, \forall z\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow$	**1p**
	$(x-2)^2\leq 9 \Leftrightarrow \lvert x-2\rvert\leq 3 \Leftrightarrow x\in[-1,5]$ $(2y-3)^2\leq 9 \Leftrightarrow \lvert 2y-3\rvert\leq 3 \Leftrightarrow y\in[0,3]$ $(3z-4)^2\leq 9 \Leftrightarrow \lvert 3z-4\rvert\leq 3 \Leftrightarrow z\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$	**2p**
	b) $x, y\in\mathbb{N},\ x\neq 0,\ y\neq 0$ $\left[\frac{x}{y}\right]=2\Rightarrow 2\leq\frac{x}{y}<2+1\Leftrightarrow\frac{1}{3}<\frac{y}{x}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\frac{y}{x}\right]=0\Rightarrow\frac{y}{x}=\left\{\frac{y}{x}\right\}=0,4\Leftrightarrow$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}\frac{y}{x}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}2x=5y\\x,y\in\mathbb{N}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=5k\\y=2k\end{array}\right., k\in\mathbb{N}^*\\\left[\frac{x^2}{y}\right]=5050\Rightarrow 5050\leq\frac{x^2}{y}<5050+1\end{array}\right\}\Rightarrow 5050\leq\frac{25k}{2}<5051\Rightarrow$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}404\leq k<404\frac{2}{5}\\k\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\}\Rightarrow k=404\Rightarrow x=2020 \text{ şi } \mathrm{y}=808.$	**1p**

3.	Soluţie:	
	a) Fie $AC \cap BD = \{O\}$.	
	În $\left.\begin{array}{l}\Delta AOB: m(\measuredangle AOB) = 90^\circ \\ AB = a;\ AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow BO = \dfrac{a}{2} \Rightarrow BD = a;$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}AA' \perp (ABC) \\ AC \perp BD \\ AC, BD \subset (ABC) \\ AC \cap BD = \{O\}\end{array}\right\} \overset{T.3\perp}{\Longrightarrow} A'O \perp BD \Rightarrow d(A', BD) = A'O;$	**1p**
	În $\Delta A'AO$ se calculează $A'O = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.	
	b) Se construieşte $AF \perp A'O,\ F \in A'O$.	
	$\left.\begin{array}{l}AF \perp A'O \\ A'O \perp BD \\ AO \perp BD \\ A'O \cap BD = \{O\} \\ A'O, BD \subset (A'BD)\end{array}\right\} \overset{R2.T.3\perp}{\Longrightarrow} AF \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AF;$	**1p**
	În $\triangle A'AO$ se calculează AF= $\dfrac{AA' \cdot AO}{A'O} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.	**1p**
	c) Fie $AB \cap A'B' = \{E\}$.	
	În $\Delta A'AE: \left.\begin{array}{l}BB' \parallel AA' \\ BB' = \dfrac{1}{2}AA'\end{array}\right\} \Rightarrow [BB']$ – linie mijlocie $\Rightarrow B$ – mijlocul lui $[AE] \Rightarrow AB = BE;$	**1p**
	În $\Delta DAE: \left.\begin{array}{l}[DB] - \text{mediană} \\ DB = \dfrac{1}{2}AE\end{array}\right\} \Rightarrow m(\measuredangle ADE) = 90^\circ \Rightarrow AD \perp DE;$	
	$\left.\begin{array}{l}AA' \perp (ADE) \\ AD \perp DE \\ AD, DE \subset (ADE)\end{array}\right\} \overset{T.3\perp}{\Longrightarrow} A'D \perp DE;$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}(ABC) \cap (A'B'D) = DE \\ A'D \perp DE,\ A'D \subset (A'B'D) \\ AD \perp DE,\ AD \subset (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow m(\measuredangle((ABC),(A'B'D))) = m(\measuredangle(A'D, AD)) = m(\measuredangle A'DA);$	
	$\triangle A'AD$ – dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\measuredangle A'DA) = 45^\circ$.	**1p**

4.	a) Se împarte fiecare muchie a cubului în 4 segmente egale, obţinându-se astfel 64 de cuburi egale cu muchia de $\frac{1}{4}$.	1p
	Diagonala unui astfel de cub este de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Se aplică principiul lui Dirichlet celor 65 de puncte distincte şi celor 64 de cuburi mici obţinute. Rezultă că există cel puţin două puncte într-un cub din cele 64 de cuburi mici.	1p
	Atunci distanţa dintre cele două puncte este cel mult egală cu lungimea diagonalei cubului mic, care este $\frac{\sqrt{3}}{4}$.	1p
	b) Notăm $AA'=h, AB=a$ În triunghiul OCE: $m(\measuredangle C)=90^\circ \overset{T.P}{\Rightarrow} OE^2=OC^2+CE^2 \Rightarrow OE^2=\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{4}$;	1p
	În triunghiul OAA′: $m(\measuredangle A)=90^\circ \overset{T.P}{\Rightarrow} A'O^2=\frac{a^2}{2}+h^2$; În triunghiul A′C′E: $m(\measuredangle C')=90^\circ \overset{T.P}{\Rightarrow} A'E^2=2a^2+\frac{h^2}{4}$;	1p
	$\triangle A'OE: m(\measuredangle O)=90^\circ \overset{T.P}{\Rightarrow} A'E^2=A'O^2+OE^2 \Rightarrow 2a^2+\frac{h^2}{4}=$ $\frac{a^2}{2}+h^2+\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{4} \Rightarrow a^2=h^2 \Rightarrow h=a \Rightarrow$ Prisma este cub.	2p